Μάθημα 1ο

03/10/16

Βιβλιογραφία
Β. O' Neil Στοιχειώδη διαφορική γεωμετρία
Δ. Κουτρουφιώτη
Α. Pressely

www.kallipos.gr
Α. Αρβανιτογεώργου

Θα μελετήσουμε γεωμετρικά αντικείμενα στο $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$
Θα μιλάμε για $\mathbb{R}^n$, $n=2$ ή 3 $(n\geq 2)$

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R}\times\cdots\times\mathbb{R}}_{n\text{-φορές}} = \{(x_1,\dots,x_n) / x_1,\dots,x_n\in\mathbb{R}\}$$

$x=(x_1,\dots,x_n)$, $y=(y_1,\dots,y_n)$
$x=y \Leftrightarrow x_1=y_1,\dots,x_n=y_n$

Ο $\mathbb{R}^n$ είναι διανυσματικός χώρος με $+$, $\cdot$
$x+y \overset{\text{ορ.}}{=} (x_1+y_1,\dots,x_n+y_n)$
$\lambda x \overset{\text{ορ.}}{=} (\lambda x_1,\dots,\lambda x_n)$

Ο $\mathbb{R}^n$ είναι διανυσματικός χώρος διάστασης n
Συνήθης βάση του $\mathbb{R}^n$ είναι η $\{e_1=(\underset{\downarrow\,1^\eta\text{ θέση}}{1},0,\dots,0),\dots,e_n=(0,0,\dots,\underset{\downarrow\,n^\eta\text{ θέση}}{1})\}$

$\forall x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, ισχύει $x=\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$

Ο $\mathbb{R}^n$ ως διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο: $\langle\ ,\ \rangle: \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$
$(x,y)\longmapsto\langle x,y\rangle = x_1y_1+\cdots+x_ny_n$ για $x=(x_1,\dots,x_n)$, $y=(y_1,\dots,y_n)$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ εσωτερικού γινομένου:

1) $<x,y> = <y,x>$

2) $<x,x> \geq 0$ και $<x,x> = 0 \Leftrightarrow x = (0,\dots,0) = 0$

3) $<x+y, z> = <x,z> + <y,z>$

4) $<\lambda x, y> = \lambda <x,y>$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Δύο διανύσματα x, y καλούνται **κάθετα** (ή **ορθογώνια**) ανν $<x,y> = 0$

ΟΡΙΣΜΟΣ: **Μήκος** διανύσματος: $\|x\| = \sqrt{<x,x>} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$, $x = (x_1, \dots, x_n)$

Cauchy-Schwartz: $|<x,y>| \leq \|x\| \, \|y\|$ και επιπλέον η "=" ισχύει ανν x, y γραμμικά εξαρτημένα

Τριγωνική ανισότητα (Minkowski): $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (? πότε ισχύει το "=")

Γωνία μη μηδενικού διανύσματος

Έστω $x \neq 0$ και $y \neq 0$ $\quad \left| \frac{<x,y>}{\|x\| \, \|y\|} \right| \leq 1$.

Υπάρχει μοναδική γωνία $\varphi \in [0, \pi]$ και $\cos\varphi = \frac{<x,y>}{\|x\| \, \|y\|}$

Η φ καλείται γωνία των x, y.

$<x,y> = \|x\| \, \|y\| \cos\varphi$

- Αν $x \neq 0$ και $y \neq 0$ και x, y είναι κάθετα $\Leftrightarrow \varphi = \pi/2$.

ΟΡΙΣΜΟΣ: Μια βάση $\{v_1, \dots, v_n\}$ του $\mathbb{R}^n$ καλείται **ορθομοναδιαία** ανν $<v_i, v_j> = \delta_{ij}$, $i \geq 1$, $j \leq n$

π.χ. ορθομοναδιαία βάση $\{e_1 = (1,0,\dots,0), \dots, e_n = (0,\dots,0,1)\}$

ΠΡΟΤΑΣΗ: Αν $\{v_1, \dots, v_n\}$ είναι ορθομοναδιαία βάση τότε, ισχύει $x = \sum_{i=1}^{n} <x, v_i> v_i$ $\quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

Αν $x = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$, $a_i = <x, v_i>$

$y = \sum_{i=1}^{n} b_i v_i$, $b_i = <y, v_i>$

Τότε $<x,y> = a_1b_1 + \cdots + a_nb_n$, $\|x\| = \sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}$

Απόσταση στον $\mathbb{R}^n$

Είναι η συνάρτηση $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow [0,+\infty)$ με $d(x,y) = \|x-y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}$
$x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ:

1) $d(x,y) = d(y,x)$
2) $d(x,y) \geq 0$ και $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
3) Τριγωνική ανισότητα $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

ΙΣΟΜΕΤΡΙΕΣ ΤΟΥ $\mathbb{R}^n$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Μια απεικόνιση $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ καλείται **ισομετρία** αν $d(T(x), T(y)) = d(x,y)$ $\forall x,y \in \mathbb{R}^n$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:

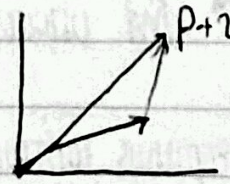
1) Η ταυτοτική απεικόνιση $Id : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ είναι ισομετρία.
2) Αν $T_1, T_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ είναι ισομετρίες τότε $T_1 \circ T_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ είναι ισομετρία

Συμβολίζουμε με $Isom(\mathbb{R}^n)$ το σύνολο των ισομετριών του $\mathbb{R}^n$.

Παράλληλες μεταφορές

ΟΡΙΣΜΟΣ: Παράλληλη μεταφορά κατά $v \in \mathbb{R}^n$ είναι η απεικόνιση $T_v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$
$T_v(p) = p + v$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: T_v είναι ισομετρία
$d(T_v(p), T_v(q)) = \|(p+v) - (q+v)\| = \|p - q\| = d(p,q)$



$T_0 = Id$
$T_v \circ T_w = T_{v+w} = T_{w+v}$

Για $w = -v$ έχω $T_v \circ T_w = Id = T_{-v} \circ T_v$
$\Rightarrow T_v$ αντιστρέφεται με αντίστροφη $(T_v)^{-1} = T_{-v}$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Κάθε ισομετρία είναι "1-1"

Μια γραμμική απεικόνιση $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ καλείται ορθογώνιος μετασχηματισμός $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \langle A(x), A(y) \rangle = \langle x, y \rangle \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$

$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y \rangle$.

ΠΡΟΤΑΣΗ: Κάθε ορθογώνιος μετασχηματισμός του $\mathbb{R}^n$ είναι ισομετρία του $\mathbb{R}^n$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: $d(A(x), A(y)) = \|A(x) - A(y)\| = \|A(x-y)\| = \sqrt{\langle A(x-y), A(x,y) \rangle} =$

$= \sqrt{\langle x-y, x-y \rangle} = \|x-y\| = d(x,y)$

$Isom(\mathbb{R}^n)$ = σύνολο των ισομετριών του $\mathbb{R}^n$
$O(n)$ = σύνολο των ορθογώνιων μετασχηματισμών του $\mathbb{R}^n$
$O(n) \subset Isom(\mathbb{R}^n)$

ΘΕΩΡΗΜΑ (Ταξινόμηση των ισομετριών του $\mathbb{R}^n$): Κάθε $T \in Isom(\mathbb{R}^n)$ γράφεται ως εξής
$T = T_v \circ A$ όπου T_v παράλληλη μεταφορά κατά v και $A \in O(v)$
(Χωρίς απόδειξη)

ΠΟΡΙΣΜΑ: Κάθε $T \in Isom(\mathbb{R}^n)$ είναι "1-1" και επί, άρα υπάρχει η $T^{-1} \in Isom(\mathbb{R}^n)$.
$T^{-1}(p) = \tilde{p}$
$T^{-1}(q) = \tilde{q}$
$d(T^{-1}(p), T^{-1}(q)) = d(\tilde{p}, \tilde{q}) = d(T(\tilde{p}), T(\tilde{q})) = d(p,q)$

Γεωμετρική Ισοτιμία αφορά σχήματα του $\mathbb{R}^n$, δηλ. υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Το σχήμα S καλείται γεωμετρικώς ισότιμο του σχήματος $\tilde{S}$ αν υπάρχει $T \in Isom(\mathbb{R}^n)$ και $T(S) = \tilde{S}$